

## 書籍紹介

『「無限」に魅入られた天才数学者たち』（早川書房、2002年2月刊）

### インターネット・ブックショップ

日本語書籍のインターネット・ブックショップができてから、本の購入が非常に手軽になった。一時帰国の度に、本屋で所望の書籍を探すが、まず一箇所ですべての書籍を入手することは不可能である。専門書などは、注文取り寄せになることが多い。その苦労を省いてくれ、かつOCS経由の注文のようにべらぼうな価格にならないところがあり難い。

インターネット・ブックショップの代表格は、amazon.co.jpとbk1.co.jpだ。アマゾンの方は、買い上げ価額が1500円以上だと日本国内の宅配便送料が無料とあるから、本屋で無駄な時間を過ごす意味がなくなった。アマゾンの日本サイトでも外国語書籍を購入できるが、本場のamazon.comで購入した方がかなり割安だし、ハードカバー、ソフトカバー、古本などの選択幅も大きい。ハンガリーへ直接、国際宅急便で送ってもらう方がかなり安く上がるし、書籍には関税がかからない。

これまで新聞広告や書評欄で本の購入を決めることが多かったが、ネットショップを利用するようになってからは、テーマや分野に沿って探すので、書評に載らない力作や関連テーマなどに遭遇するチャンスが広がる。だから、最近、暇な時にネットショップを覗き、どんな本が売れているのか、面白そうなテーマを扱った本がないか、散策するのが楽しみになっている。

比較的ポピュラーな専門書の売れ行きのランキングを見ていると、内容的に平易とは思われない書籍がランキングの上位を占めているのに驚く。たとえば、『ビューティフル・マインド』（新潮社、2002年3月）などは科学一般・科学者・伝記のランキングのトップを占めているが、600ページ近い分量に加え、内容的に数理経済学の知識がないと簡単に読めるものとは思われないのに、1番売れている。もっとも、これなどは映画を観た人が原作を購入するというところから、必ずしも本を読むという行動とは結びつかない。本棚に飾っておくケースが多いと見た。

### 集合と無限

同じく、科学者の伝記あるいは数学一般の分野で売れているのが、『「無限」に魅入られた天才数学者たち』である。これも、現代集合論の初等的な知識を前提としており、誰もが簡単に読める本ではないが、ランキングの上位を占めている。本当に売れている数だけ読まれているなら、日本の知識水準も捨てたものではない。

戦後生まれの我々でも、学校教育で「集合論」を勉強するチャンスはなかった。大学生になって家庭教師を始めた頃に、集合や写像（関数）などの現代数学の基礎論にもとづく数学教科書が、中学校で使用され始めた。今では小学校からこれ

らの基礎概念を学び、現代数学を学ぶ基礎を獲得するように教科が組み立てられている。

数学の分野に集合論が生まれて、まだ百年ほどしか経っていない。カントールというドイツの数学者が編み出した数学の基礎概念で、ノイマンも集合論の基礎の確立にかなりの貢献をしている。カントールはもともと数論から数学研究を始めた。数論というのは、自然数、整数、有理数、無理数、実数などの「数の研究」である。ハンガリーの天才数学者エルデシュも「数論」の研究者だったが、彼はとくに「素数」論の大家であった。

カントールは数論の研究から、「無限の数の比較」という研究に入った。たとえば、自然数の集まり（集合）も整数の集まり（集合）も、無限に続くという意味で、二つとも「無限集合」である。常識的には、「正の整数の集合」である「自然数の集合」の濃さは、「正の整数と負の整数」を含む「整数の集合」の濃さより小さいと考えられる。ところが、「自然数の集合」の要素を、「整数の集合」の要素に一対一に対応させることができるので、「無限集合」としては同等だといえる。ここから、「この二つの無限集合、自然数の集合と整数の集合の濃度は同等である」と結論される。

「自然数」、「整数」、「有理数」の集合は、相互に一対一に対応し、数え上げるという行為が成り立つので、「可算（無限）集合」と呼ばれる。ところが、数直線の連続した線上は、自然数や整数や有理数だけでは埋まらない。その間隙を埋めるのが無理数である。そして重要なことは、「無理数の集合」は「自然数集合」と一対一に対応しない。無理数を含んだ「実数」（有理数と無理数からなる集合）は数え上げが可能な可算集合ではなく不可算集合で、「無限の次元」が「自然数」や「整数」の無限とは異なるのだ。

ここから、「無限の次元」をどうやって規定できるかという問題が生まれる。無限にも次元があるとすると、「自然数や整数の無限」の次に来る「無限の次元」は、「実数の無限」だろうか。この二つの異なる無限次元の間に、別の次元の無限が存在するのだろうか、しないのだろうか。存在しないとする仮説が「連続体仮説」である。カントールはこの証明をめぐる二転三転し、やがて精神的に廃人になっていった。

### 「無限」という矛盾

限りが無いというのは、日常の感覚で理解しがたい。宇宙が無限に広がっている、あるいは現代のナノテクノロジーで物質を極限にまで裁断することができる。宇宙にも物質にも「切りがない」というのを納得するのは難しい。しかし、マクロの宇宙世界も、ミクロの素粒子の世界も、無限という不思議な世界になっている。こうした物理学で表現される無限は実体的な無限で、数学の無限は観念的な無限だが、論理を突き詰めた数学の無限の世界は、物理の「実物の世界」を抽象的に映し出していると考えられる。思考を極限まで突き詰めると、物理世界の極限に至るというのも、不思議なことである。

無限に次元があり、またその次元も無限であるとしたら、世界は無限の階層から構成されていることになる。そこから結論されることは、多分、「人間は永遠に世界を完全に理解することはできない」という公理ではないだろうか。

このように割り切ると、いろいろなことが分かる。現代数学では「連続体仮説を証明することはできない」。それを肯定した公理体系も、それを否定した公理体系も構築することができる。ここでゲーデルの定理の出番になる。

「連続体仮説の証明不可能性」は、ゲーデルの「不可能性定理」、つまり「ある公理系内部で、証明不可能な定理が存在する」と本質的に同じことを言い表しているように見える。一つの世界のなかで、証明できないことがある。したがって、それを証明しようとするれば、もう一つ高い世界（公理系）へ移る必要がある。そして、それは永遠のプロセスになる。ヒルベルトの助手として、現代数学の公理体系化を推進していたノイマンは、このゲーデルの不可能性定理に大きな衝撃を受けた。ノイマンがカントールのように精神分裂病にかからなかったのは、数学の世界に留まることなく、物理学の世界に数学の応用の可能性を追求したからだろう。

「ラッセルのパラドックス」も、基本的に同じである。「すべての集合からなる全体集合を考えることができない」。なぜなら、「その集合のあらゆる部分集合を含む集合」を作ることができるからである。無限は無限に続く。

いずれにしても、「無限にも次元がある」というのは重要な視点である。それは数学の世界だけに言えることではなく、逆に現実の世界の論理的反映だと理解すべきだろう。毎日、こんなことを突き詰めて考えている数学者が精神的な異常をきたすのは理解できる。凡人に生まれて良かったということか。